VI PRODUIT MIXTE ET PRODUIT VECTORIEL

1) Produit mixte

PROP et DEF: $E$ esp. vect. euclidien orienté de dimension $n = 2$ ($E$ est alors noté $P$) ou 3 ($E$ est alors noté $E_3$).

Une famille de $n$ vecteurs de $E$ a même déterminant dans toute base orthonormée directe ; ce déterminant est appelé le *produit mixte* des vecteurs de la famille.

Notation : $\det(\overrightarrow{x}_1, ..., \overrightarrow{x}_n)$ ou $[\overrightarrow{x}_1, ..., \overrightarrow{x}_n]$.

D1

REMARQUE : si on change l'orientation de $E$, le produit mixte est changé en son opposé.

PROP : soient dans $P$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls, $\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})} = \theta\ [2\pi]$ ; alors

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \|\overrightarrow{u}\| \|\overrightarrow{v}\| \sin\theta$$

Application à la détermination de l'angle d'une rotation :

Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur unitaire de $P$, l'angle $\theta$ d'une rotation $r$ est défini modulo $2\pi$ par

$$\begin{cases} \cos\theta = (\overrightarrow{u} \mid r(\overrightarrow{u})) \\ \sin\theta = \det(\overrightarrow{u}, r(\overrightarrow{u})) \end{cases}$$

D2

2) Produit vectoriel dans $E_3$

LEMME DE RIESZ : pour toute forme linéaire $\varphi$ sur $E$ , il existe un unique vecteur $\overrightarrow{n}$ tel que

$$\forall \overrightarrow{x} \in E \quad \varphi(\overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{n} \mid \overrightarrow{x})$$

et $\overrightarrow{n}$ est un vecteur orthogonal au noyau de $\varphi$ (qui est un hyperplan si $\varphi \neq 0$).

D3

DÉFINITION DU PRODUIT VECTORIEL

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de $E_3$ ; l'application de $E_3$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\overrightarrow{x} \mapsto \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{x})$ étant linéaire, il existe un unique vecteur $\overrightarrow{n}$ tel que $\forall \overrightarrow{x} \in E_3 \quad \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{n} \mid \overrightarrow{x})$ ; ce vecteur $\overrightarrow{n}$ est par définition le produit vectoriel de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ ; on a donc

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \forall \overrightarrow{x} \in E_3 \quad (\overrightarrow{w} \mid \overrightarrow{x}) = \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{x})$$

REMARQUE : si on change l'orientation de $E_3$, le produit vectoriel est changé en son opposé.

PROPRIÉTÉS

P1 :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{w}) &= \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \\ &= (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} \mid \overrightarrow{u}) = \det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}) \\ &= (\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v}) = \det(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \end{aligned}$$

Ceci justifie l'appellation "produit mixte".

P2 : le produit vectoriel est une application bilinéaire antisymétrique de $E_3^2$ dans $E_3$ :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{u} + \lambda \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} &= \\ \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} &= \end{aligned}$$

P3 : $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

P4 : $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est liée.

P5 : si $\overrightarrow{u}\left|\begin{array}{l}x\\y\\z\end{array}\right. \quad \overrightarrow{u}'\left|\begin{array}{l}x'\\y'\\z'\end{array}\right.$ dans une base orthonormée directe, alors $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u}'\left|\begin{array}{l}\begin{vmatrix}y & y'\\z & z'\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}z & z'\\x & x'\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}x & x'\\y & y'\end{vmatrix}\end{array}\right.$

P6 : double produit vectoriel

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})\wedge\overrightarrow{w} &= (\overrightarrow{u}\mid\overrightarrow{w})\,\overrightarrow{v}-(\overrightarrow{v}\mid\overrightarrow{w})\,\overrightarrow{u}\\ \overrightarrow{u}\wedge(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}) &= (\overrightarrow{u}\mid\overrightarrow{w})\,\overrightarrow{v}-(\overrightarrow{u}\mid\overrightarrow{v})\,\overrightarrow{w}\end{aligned}$$

P7 : relation de Lagrange :

$$(\overrightarrow{u}\mid\overrightarrow{v})^2+\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\|^2=\|\overrightarrow{u}\|^2\,\|\overrightarrow{v}\|^2$$

P8 : $\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\|=\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\sin\theta$ où $\theta$ est la mesure de l'angle non orienté $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.

P9 : $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ libre $\Rightarrow(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})$ base directe de $E_3$.

P10 : si $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ libre, $\theta$ la mesure de l'angle non orienté $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}})$ et $\overrightarrow{n}$ vecteur unitaire directement orthogonal à $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ (c'est-à-dire $\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{n})>0$), alors

$$\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\sin\theta\;\overrightarrow{n}$$

P11 : $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ est une base orthonormée directe de $E$ ssi

$$(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\text{ est orthonormée et }\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$$

D4

VII AUTOMORPHISMES ORTHOGONAUX (ou ISOMÉTRIES) en dimension 3.

1) Classification.

LEMME 1 : l'orthogonal d'un sev stable est stable, plus précisément : soit $F$ un sev de $E$ esp vect euclidien, stable par une isométrie $f\in O(E)$ (i.e. $f(F)\subset F$), alors

1. $f(F)=F$
2. $f(F^{\perp})=F^{\perp}$
3. $f_{|F}$ et $f_{|F^{\perp}}$ sont des isométries

D5

LEMME 2 : si $f\in O(E)$, l'ensemble des vecteurs invariants par $f$ : $Inv(f)=\ker(f-id)$ est stable par $f$, ainsi que l'ensemble des vecteurs anti-invariants $Inv^{-}(f)=\ker(f+id)$ et ces deux sev sont orthogonaux.

D6

On peut donc écrire $E=Inv(f)\overset{\perp}{\oplus}Inv^{-}(f)\overset{\perp}{\oplus}F$

LEMME 3 : la dimension de $F$ défini ci-dessus est paire.

D7

On en déduit la classification des isométries de $E_3$ :

| $Inv(f)$ | $Inv^-(f)$ | $F$ | nature de $f$ |
|---|---|---|---|
| $E_3$ | $\{\overrightarrow{0}\}$ | $\{\overrightarrow{0}\}$ | $f = id$, $f \in O^+(E_3)$ <br> matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ |
| $P$ | $D$ | $\{\overrightarrow{0}\}$ | $f$ est une réflexion de base $P, f \in O^-(E_3)$ <br> matrice réduite $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ |
| $D$ | $P$ | $\{\overrightarrow{0}\}$ | $f$ est un retournement d'axe $D, f \in O^+(E_3)$ <br> matrice réduite $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ |
| $D$ | $\{\overrightarrow{0}\}$ | $P$ | $f$ est une rotation propre d'axe $D, f \in O^+(E_3)$ <br> matrice réduite $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ $\theta \in ]0, \pi[$ |
| $\{\overrightarrow{0}\}$ | $E_3$ | $\{\overrightarrow{0}\}$ | $f = -id$, $f \in O^-(E_3)$ <br> matrice $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ |
| $\{\overrightarrow{0}\}$ | $D$ | $P$ | $f$ est une antirotation propre d'axe $D, f \in O^-(E_3)$ <br> matrice réduite $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ $\theta \in ]0, \pi[$ |

D8

COROLLAIRE :

| |
|---|
| $f$ est une isométrie positive de $E_3$ |
| $\Leftrightarrow f$ est une rotation |
| $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{il existe une base orthonormée dans laquelle } f \text{ a pour matrice } \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ (\theta = 0 : id,\ \theta = \pi : \text{ retournement, } \theta \in ]0, \pi[ \text{ : rotation propre}) \end{cases}$ |
| $\Leftrightarrow$ l'ensemble des vecteurs invariants est de dimension impaire |

| |
|---|
| $f$ est une isométrie négative de $E_3$ |
| $\Leftrightarrow f$ est une antirotation |
| $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{il existe une base orthonormée dans laquelle } f \text{ a pour matrice } \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ (\theta = 0 : \text{ réflexion, } \theta = \pi : -id,\ \theta \in ]0, \pi[ \text{ : antirotation propre}) \end{cases}$ |
| $\Leftrightarrow$ l'ensemble des vecteurs invariants est de dimension paire |

D9

2) Définition de l'angle d'une rotation ou d'une antirotation $f$, d'axe $D$.

Un vecteur $\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$ étant choisi sur $D$, on oriente $P = D^\perp$ en disant que $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est directe si $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{n}\right)$ est directe.

Par définition, l'angle $\theta$ de la rotation (ou de l'antirotation) est celui de sa restriction à $P$.

On dit alors que $f$ est la rotation (ou antirotation) autour de $\overrightarrow{n}$ et d'angle $\theta$.

REMARQUE : si on change $\overrightarrow{n}$ en $-\overrightarrow{n}$, $\theta$ est changé en $-\theta$ ; on peut donc toujours se ramener à $\theta \in [0, \pi]$.

PROP 1 : $\mathrm{tr}(f) = 2\cos\theta + 1$ pour une rotation, $2\cos\theta - 1$ pour une antirotation.

D10

Ceci détermine $\theta$ en valeur absolue ; pour obtenir son signe utiliser la

PROP 2 : si $\overrightarrow{u}$ n'appartient pas à $D$, $\det\left(\overrightarrow{u}, f\left(\overrightarrow{u}\right), \overrightarrow{n}\right)$ a même signe que $\sin\theta$.

D11

Pour l'angle, on peut aussi utiliser :

PROP 3 : si $f$ est une rotation ou antirotation de $E_3$ autour de $\overrightarrow{n}$ (*unitaire*), et $\overrightarrow{u}$ un vecteur *unitaire* orthogonal à l'axe, son angle $\theta$ est défini par : $\begin{cases} \cos\theta = \left(f(\overrightarrow{u}) \mid \overrightarrow{u}\right) \\ \sin\theta = \det(\overrightarrow{u}, f(\overrightarrow{u}), \vec{n}) \end{cases}$

REMARQUES :
1. L' antirotation autour de $\overrightarrow{n}$ et d'angle $\theta$ est la composée commutative de la rotation autour de $\overrightarrow{n}$ et d'angle $\theta$ et de la réflection par rapport à $D^{\perp}$, d'où le nom parfois donné de rotation-réflexion.
2. $f$ est une antirotation autour de $\overrightarrow{n}$ et d'angle $\theta$ ssi $-f$ est une rotation autour de $\overrightarrow{n}$ et d'angle $\theta + \pi$.

D12

3) Composées de retournements et de réflexions.

Remarque : retournement (ou demi-tour, ou encore renversement) d'axe $D$ = rotation d'angle $\pi$ et d'axe $D$ = symétrie orthogonale de base (ou d'image, ou par rapport à) $D$.

P1 : soient $D_1$ et $D_2$ deux droites de $E_3$ faisant un angle $\varphi \in [0, \pi/2]$ (ce qui signifie que $\varphi$ est l'angle non orienté entre $\overrightarrow{u_1} \in D_1$ et $\overrightarrow{u_2} \in D_2$), et $s_{D_1}$ et $s_{D_2}$ les retournements associés ; alors $s_{D_2} \circ s_{D_1}$ est la rotation d'angle $2\varphi$ autour de $\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}$.

D13

CORO : toute rotation vectorielle de $E_3$ se décompose en produit de deux retournements dont les axes sont orthogonaux à l'axe de la rotation, l'un d'entre eux pouvant être choisi arbitrairement.

D14

P2 : soient $P_1$ et $P_2$ deux plans de $E_3$, se coupant en $D$, faisant un angle $\varphi \in [0, \pi/2]$ (ce qui signifie que $\varphi$ est l'angle non orienté entre $\overrightarrow{u_1} \in D^{\perp} \cap P_1$ et $\overrightarrow{u_2} \in D^{\perp} \cap P_2$), et $s_{P_1}$ et $s_{P_2}$ les réflexions associées ; alors $s_{P_2} \circ s_{P_1}$ est la rotation d'angle $2\varphi$ autour de $\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}$.

D15

CORO : toute rotation vectorielle de $E_3$ se décompose en produit de deux réflexions dont les plans contiennent l'axe de la rotation, l'une d'entre elles pouvant être choisie arbitrairement.

D16

On en déduit que toute isométrie de $E_3$ est produit d'au plus trois réflexions.

D17